

NOVEMBER/DECEMBER 2023

BMA61 — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.



1. What is a vector space?
திசையென் வெளி என்றால் என்ன?
2. Define linearly dependent over F.
F-ன் மேல் உள்ள நேரியல் சார்புடைமையை வரையறு.
3. Define annihilator of subspace.
ஓர் உள்வெளியினை வரையறு.
4. Define inner product space.
உட்பெருக்கு வெளியை வரையறு.
5. Define algebraic over F.
F-ன் மேல் உள்ள இயற்கணிதம் வரையறு.
6. Define characteristic root and vector.
சிறப்பியல்பு மூலம் மற்றும் திசையென்னை வரையறு.

7. Define matrix of linear transform.
ஒருபடி உருமாற்றத்தின் அணியை வரையறு.
8. Define similar matrix.
ஒத்த அணியை வரையறு.
9. What is trace in matrix?
அணியின் சுவடு என்றால் என்ன?
10. State Cramer's rule.
கிராமர் விதியின் கூற்றை எழுது.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If V is the internal direct sum of $U_1, \dots, U_n$, then prove that V is isomorphic to the external direct sum of $U_1, \dots, U_n$.

$U_1, \dots, U_n$ ன் உள்நேர்க்கூட்டல் V எனில், $U_1, \dots, U_n$ ன் வெளிநேர்க்கூட்டலின் சம அளவுள்ள V என நிறுவுக.

Or

- (b) Prove that $L(S)$ is a subspace of V .

V ன் உள்வெளி $L(S)$ என நிறுவுக.

12. (a) Prove that $A(A(W)) = W$.

$A(A(W)) = W$ என நிறுவுக.

Or



18. If V is finite-dimensional over F , then prove that $T \in A(V)$ is invertible if and only if the constant term of the minimal Polynomial for T is not 0.

V என்பது F ல் உள்ள முடிவுள்ள பரிமாணம் எனில் $T \in A(V)$ வை நேர்மாற்றத்திற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை T யில் உள்ள சிறும அடுக்குகோவையின் மாறா உறுப்பு 0 அல்ல என நிறுவுக.

19. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F then prove that there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ ன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களும் F ல் இருக்கும் எனில் V ல் ஒரு அடிப்படையானது அதில் T ன் அணிக்கோவை முக்கோணமாகும் என நிறுவுக.

20. Prove that for $A, B \in F_n$, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

$A, B \in F_n$, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ என நிறுவுக.

- (b) State and prove schwarz inequality.

ஸ்குவார்ட்ஸ் சமனிலி கூற்றை எழுதி நிறுவுக.

13. (a) If V is finite-dimensional over F , then prove that $T \in A(v)$ is singular if and only if there exists $av \neq 0$ in v such that $vT = 0$.

F ன் மேல் உள்ள முடிவுள்ள பரிமாணம் V எனில் $T \in A(v)$ வழுப்புள்ளியாக இருப்பதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை V ல் உள்ள $av \neq 0$ எனில் $vT = 0$ என நிறுவுக.

Or

- (b) If $\lambda \in F$ is characteristic root of $T \in A(v)$, then prove that for any polynomial $q(x) \in F(x)$, $q(\lambda)$ is a characteristic root of $q(T)$.

$T \in A(v)$ ன் சிறப்பியல்பு மூலம் $\lambda \in F$ எனில் எந்த ஒரு அடுக்குகோவை $q(x) \in F(x)$ க்கும் $q(T)$ ன் சிறப்பியல்பு மூலம் $q(\lambda)$ என நிறுவுக.

14. (a) Let V be the vector space of polynomials of degree 3 (or) less over F . In V define D by $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)D = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$ compute the matrix D in the basis.

(i) $1, x, x^2, x^3$

(ii) $1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3$

- (ii) If the matrix is part (a) in A and that in part (b) is B , find a matrix C so that $m_2(D) = Cm_1(D)C^{-1}$.



V என்பது மூன்று அல்லது குறைவான பாகை கொண்ட அடுக்கு கோவைகளின் திசையென்வெளி என்க. V ல் D யை பின்வருமாறு வரையறுக்கும்போது $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) D = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$ D ன் அணிக்கோவையை கீழ்க்கண்ட அடிப்படையில் கண்டுபிடி..

(i) $1, x, x^2, x^3$

(ii) $1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3$

(ii) A மற்றும் B என்பது பகுதி (a) மற்றும் (b) ன் அணிக்கோவை எனில், $m_2(D) = C m_1(D) C^{-1}$ என்ற அணிக்கோவை C யைக் கண்டுபிடி.

Or

(b) If V is n -dimensional vector space over F and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F then prove that T satisfies a polynomial of degree n over F .

V என்பது F -ன் மேலுள்ள n -பரிமாண திசையென்வெளி மேலும் $T \in A(V)$ யின் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்கள் F ல் இருக்கும் போது T ஒரு F ன் மேலுள்ள n பாகை அடுக்கோவையை பூர்த்தி செய்யும் என நிறுவுக.

15. (a) Prove that if $T \in A(V)$ then $\text{tr} T$ is the sum of the characteristic root of T .

$T \in A(V)$ எனில் T ன் சிறப்பியல்பு மூலத்தின் கூடுதல் $\text{tr} T$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that $\det A = \det(A')$.

$\det A = \det(A')$ என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

If V is finite – dimensional and if W is a subspace of V , then prove that W is finite dimensional $\dim W \leq \dim V$ and $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

முடிவுள்ள பரிமாணம் V மற்றும் V ன் உள்வெளி W எனில் $\dim W \leq \dim V$ ன் முடிவுள்ள பரிமாணம் W மற்றும் $\dim V/W = \dim V - \dim W$ என நிறுவுக.

17. If V is finite – dimensional and W is a subspace of V , then prove that $\hat{W}$ is isomorphic to $\hat{V}/A(W)$ and $\dim A(W) = \dim V - \dim W$.

முடிவுள்ள பரிமாணம் V மற்றும் V ன் உள்வெளி W எனில் $\hat{W}$ சமஉருவுள்ள $\hat{V}/A(W)$ மற்றும் $\dim A(W) = \dim V - \dim W$ என நிறுவுக.